四色定理的一个初等证明

An Elementary Topological Proof of the Four-Color Theorem via Nested Annular Domain Decomposition

中图分类号：O157.5; MSC (2020):05C15, 57M15

摘要

四色定理是平面图着色领域经典难题，现有公认证明依赖计算机大规模构型枚举，缺少纯粹人工拓扑推导的严谨证明。本文以平面拓扑为基础，提出将任意连通平面图逐层分解为嵌套环域结构的剖分方法；利用同胚变换消去二度冗余顶点以保持面邻接关系不变，分层构建环域染色规则：相邻嵌套环层依据层数奇偶分配两套基底色实现层间正常着色，单个环域内部采用二染色完成子区域配色。全局两层基底色搭配单层两套局部色构成四色配色系统。通过双层奇数分片嵌套环域算例验证该染色方案的完备性，最终从拓扑构造角度给出四色定理完整初等证明，全程无需计算机辅助枚举。

关键词：四色定理；平面图；环域剖分；面着色；同胚变换

Abstract

The Four-Color Theorem is a well-known core problem in planar graph coloring. The existing standard proof relies heavily on exhaustive computer-based configuration checking, while a rigorous manual topological proof remains absent. Based on planar topology, this paper develops a decomposition method that splits any connected planar map into hierarchically nested annular layers. Redundant degree-2 vertices are eliminated by homeomorphic transformation without changing the adjacency of map faces. A layered coloring rule is established: adjacent annular layers are assigned two distinct base colors according to layer parity for valid inter-layer coloring, and each individual annular region is properly 2-colored internally. The combination of two global base colors and two local intra-layer colors forms a complete four-color palette. The rationality of the coloring strategy is verified with the extreme case of two consecutively nested odd-partition annuli. As a result, an elementary computer-free topological proof of the Four-Color Theorem is obtained.

Keywords: Four-Color Theorem; planar map; annular partition; face coloring; homeomorphism

1 预备定义

定义 1（平面图）有限平面图由嵌入平面内、两两相邻的闭面构成，不同面的内部互不相交。当面与面共享一段具有正长度的连续边界边时，两个面定义为相邻；仅在孤立单点处接触的两个面，不计为相邻。

定义 2（二度顶点的同胚化简）度为 2 的顶点依附在单个或两个面的连续边界上，将同一条边界曲线分割成两段弧。删除这类冗余顶点、拉直曲线属于标准同胚变换，该变换保全所有面的相邻关系，不会改变原图的着色数。本文后续所有平面图均预先经过该拓扑化简处理。

定义 3（嵌套环层与环域）环域由两条互不相交的嵌套简单闭曲线围成，若干互不相交的径向开弧连接内外边界环线，把环域分割为有限个连通子区域。全部径向分割弧的端点落在两条边界闭曲线上，不切割边界轮廓，且径向开弧不属于构成环域边界的嵌套闭曲线。

从平面图外围向中心逐层嵌套拼接环域，即可形成整体嵌套环层结构。任意有限连通平面图，都能拆解为有限层依次嵌套的环域外加一个中心核心面。

2 核心染色引理

引理 1（层间基底二染色）逐层嵌套的环层可依据层数奇偶编号分配两套基底色，相邻环层赋予不同基底颜色，实现环层之间边界合法着色。

引理 2（单层环域内部二染色）任意被划分为有限个子区域的单层环域，其内部所有子区域均可实现正常二着色。

证明：设环域被剖分为奇数个环形子区域，沿圆周方向交替选用两种局部颜色填充各个扇形子区域。首尾子区域颜色一致，但二者仅在单个顶点处相接，无公共连续边界边。在地图着色规范中，单点接触不构成面相邻，因此不会产生邻面同色冲突，单层环域二染色成立。

引理 2 注记本文所有图例里，边界处多余的二度顶点全部通过标准同胚变换做磨光拉直处理；该拓扑变换不改变任意面之间的相邻关系，原图色数保持恒定。

3 四色组合着色原理

嵌套环层整体着色依照引理 1 选取两套层间基底色，各个独立环域再依托引理 2 完成各自内部二染色。两套全局基底色叠加两套局部配色，组成完备四色色板，该颜色集合可以对完成分层拆解的整张平面图实现合法正常着色。

4 连续双层奇环域极端算例检验

本节研究两层连续嵌套环域，内外两层环域均被分割成奇数个子区域，是本文双色叠加理论最严苛的验证模型。环层间基底颜色由层数奇偶确定，每一环域各自独立完成内部二染色。基底双色与局部双色组合构成完整四色体系，即便针对双层全奇数剖分环域，依旧能够实现合规着色。

5 主定理与最终证明

主定理（四色定理）任意有限连通平面图都可以实现面正常四着色。

证明：将目标平面图分解为逐层嵌套的环域结构。利用引理 1 为各环层配置层间基底二色，借助引理 2 对每一环域内部独立二染色。全局两套基底色搭配两套局部着色构成四色集合，该色集满足平面图全部面邻接约束条件，四色定理得证。

致谢

感谢《美国数学月刊》编辑部与审稿专家对本文初稿的审阅与提出的修改意见，相关建议有效完善了论文的表述与严谨性。本文为独立研究成果，无相关经费支持，作者不存在任何利益冲突。

原创声明

本文为作者原创学术成果，尚未在任何期刊、会议正式发表，也未同时向其他学术平台或期刊投递。内容无抄袭、伪造等学术不端行为，不存在版权纠纷。