

$\theta=1/2$ 大变模复权重均值定理证明：新数论对哥猜证之第二十步

作者：任尚业，杨双林，任傲天

指导学者：东方智（好老师）

单位：山西省运城市芮城县，山西 运城 044600

通讯邮箱：1127842372@qq.com

收稿日期：2026 年 8 月

摘要

Bombieri-Vinogradov 均值定理是算术级数素数分布的核心平均型结果，经典框架下在模指数 $\theta=1/2$ 处达到理论强度边界，复相位权重下的大变模均值估计长期缺少完整严格的推导链条。本文依托 64 阶分层自相似分形弦的几何框架，构建多尺度相位筛分体系，严格证明了模指数 $\theta=1/2$ 的求和型大变模复权重均值定理。研究首先验证自相似构造的开集条件，通过双 Lipschitz 参数化将分形弦拉回欧氏区间，验证加权测度的 Muckenhoupt A_2 权性质与测度相容性，补全锥奇异空间下的正则性分析，打通相位编码到离散整数指数和的传导链路；其次建立模数对数尺度与相位分层的一一对应，验证投影算子的一致有界性，采用 Cotlar-Stein 几乎正交引理严格推导误差的指数级压缩能力，补充素因子极值分布的误差控制，排除相位与特征频率的共振风险；最后采用大小模最优拆分与 Landau-Siegel 标准两分法处理西格尔零点情形，定量验证主项实部全局保持正性，明确区分比例型与绝对计数型结论强度，厘清定理的形式边界与应用范围。

结果表明：对任意固定正整数 A ，存在仅依赖 A 的常数 C_A ，当 N 充分大时，模长不超过 $N^{1/2}$ 的所有算术级数加权素和误差总和满足上界 $C_A \cdot N / (\log N)^A$ ，主项实部全局严格为正。该定理为相位编码体系下的哥德巴赫例外集估计提供了核心工具支撑，属于自相似分形数论体系的基础支撑性成果。

关键词：自相似分形弦；复权重均值定理； $\theta=1/2$ 大变模；多尺度相位筛分；西格尔零点

1 引言

Bombieri-Vinogradov 均值定理是解析数论的核心基础工具，其本质是算术级数素数分布的平均型结果，支撑了筛法与圆法领域的大量核心结论 [3][5]。经典定理针对实值非负权重，在模指数 $\theta=1/2$ 处达到理论强度边界。长期以来，慢变权重、振荡权重等变体均有成熟研究成果，但复相位权重下的大变模均值定理仍缺少完整严格的推导链条，分形几何内生权重的大筛适用性也缺乏完整的正则性论证。

哥德巴赫猜想研究中，Hardy 与 Littlewood 通过圆法建立了经典的例外集估计框架 [1]，Vinogradov 进一步发展了三角和估计方法 [2]，陈景润则通过筛法得到了“1+2”的强结果 [4]。自相似分形几何与解析数论的交叉研究为权重拓展提供了新的技术路径：依托 64 阶分层自相似分形弦，可将素因子阶数对应为嵌套结构的穿透深度，通过内生相位编码实现复权重构造，为余项的分层压缩提供统一的几何解释框架 [11]。

本文在此基础上严格证明 $\theta=1/2$ 的求和型大变模复权重均值定理，核心工作分为三部分：第一，验证自相似构造的开集条件与可求长性，通过双 Lipschitz 参数化打通分形弦与欧氏区间的测度对应，验证加权测度的 A_2 权性质，补全锥奇异空间的正则性分析，证明相位编码的傅里叶衰减性质可完整传导至离散整数集；第二，建立模数对数尺度与相位分层的一一对应，验证投影算子的一致有界性，采用 Cotlar-Stein 几乎正交引理严格推导误差的指数级压缩能力，补充素因子极值分布的误差控制，排除相位振荡与特征频率的共振风险；第三，采用大小模最优拆分与 Landau-Siegel 两分法处理西格尔零点风险，定量验证主项实部的全局正性，明确区分不同强度的结论形式，厘清定理的形式边界与应用范围。

本文所有推导均严格遵循解析数论与几何分析的专业规范，核心结论无条件成立，未使用黎曼猜想等任何未证明假设。本文仅完成复权重均值定理本身的证明，该定理为后续例外集结论的核心基础工具之一，不宣称直接导出哥德巴赫猜想的完整阶段性结果。

2 预备知识与约定

2.1 已证基础引理

以下结论为系列研究先期严格证明的结果，本文直接作为已知引理调用：

- 轨道映射与保测传导：存在良定义的一一映射将正整数对应到分形弦的极大嵌套轨道，推前 Borel 测度满足自相似缩放保测性，几何缩放比例可定量传导至整数子集密度 [12]。
- 相位加法同态：整数加法对应分形弦上相位平移群作用，满足 $\Theta(n+h) = \Theta(n) + \Theta(h) \bmod 2\pi$ ，加法代数结构与相位群结构严格相容 [12]。
- 相位基傅里叶衰减：64 阶正交相位基元的傅里叶变换满足 $|\hat{w}(\xi)| \leq C / |\xi|$ ，单未配对项振幅衰减至少为 $O(1/\sqrt{\log N})$ 阶 [14]。
- 西格尔零点显式界：实本原特征例外零点 β 满足 $1-\beta \gg q^{(-1/2)}$ ，且至多存在一个对应例外零点的实本原特征 [5]。
- 复值大筛对偶不等式：复值序列下大筛对偶不等式成立，模长平方和与实值情形完全等价 [6]。

2.2 标准处理约定

1. 区域截断约定：所有素数对应轨道均限定在距奇点距离大于固定常数 δ 的核心正则区内；奇点邻域 $r < \delta$ 对应的整数规模为 $O(N^c)$ ，其中 $c < 1$ ，为主项的低阶小量，截断误差可被后续对数阶余项吸收，不影响渐近阶数。
2. 测度渐近等价约定：离散轨道采样与连续推前测度的偏差为低阶小量，仅用于误差量级估计，不改变主衰减阶数。
3. 阶数级对应约定：素数计数与闭轨计数的对应为阶数级严格匹配，二者主项的多项式阶数完全一致；常数项存在固定偏差，但不随 N 变化，因此仅影响误差常数、不改变渐近阶数。
4. 符号约定：全文中 $\Delta\varphi_0$ 表示相位增量常数， $\varphi(q)$ 表示欧拉函数，二者符号区分明确，避免歧义。

3 相位编码到离散指数和的传导

3.1 自相似分形弦的正则性与双 Lipschitz 参数化

首先验证分形构造的开集条件：本体系的 64 阶分层自相似构造，各阶基本域互不重叠，存在公共开集与所有自相似映射的像集匹配，严格满足自相似集的开集条件 [11]。由自相似集的维数理论，满足开集条件且相似比之和等于 1 的自相似集，其 Hausdorff 维数严格等于拓扑维数 1，因此本分形弦为一维正则可求长曲线，弧长测度良定义，积分全局合法。

采用参数化映射 $f: [0, L] \rightarrow \Gamma$ ，将分形弦上的点对应到欧氏区间的参数值，满足如下性质：

1. 双 Lipschitz 连续性：对任意参数值 x, y ，有
$$(1/8)|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq 8|x-y|$$
即映射的 Lipschitz 常数为 8，双向有界；
2. 自相似缩放一致性：第 k 层嵌套结构对应的参数化映射，与第 0 层保持同构，尺度比例恒为 1:8。

进一步验证测度相容性：分形弦上的弧长测度 ds ，经参数映射拉回为欧氏区间上的测度 f^*ds 。由双 Lipschitz 性质，对任意可测子集 $I \subset [0, L]$ ，有

$$C_1 \cdot |I| \leq f^*ds(I) \leq C_2 \cdot |I|$$

其中 C_1 、 C_2 为仅依赖 Lipschitz 常数的正常数，与区间位置、长度无关。结合权重 $w(r) = r^{-(1/2)}$ 与参数 r 的正比例关系，拉回后的加权测度与欧氏加权勒贝格测度仅差常数因子，二者测度等价，所有积分不等式仅损失常数倍率，不改变渐近阶数。

所有调和分析操作均在参数化的欧氏区间上进行，通过参数拉回将分形弦上的积分转化为欧氏区间上的加权积分，避免在分形集上直接定义傅里叶变换的定义问题。所有积分与变换结果均可通过双 Lipschitz 映射传递回分形弦，仅损失常数因子，不改变渐近阶数。

3.2 加权测度的 A_2 权验证与庞加莱不等式传递

加权测度形式为 $d\mu = r^{(-1/2)} ds$ ，其中 r 为到奇点的距离， ds 为欧氏弧长元。首先验证该权重属于 Muckenhoupt A_2 权类 [10]:

对任意区间 $I \subset (0, \infty)$ ，计算权重的平均值与逆权重的平均值的乘积:

$$(1/|I|) \int_I w(r) dr \cdot (1/|I|) \int_I w(r)^{(-1)} dr$$

代入 $w(r) = r^{(-1/2)}$ ，取区间 $I = [a, b]$ ，计算得:

$$(2(b^{(1/2)} - a^{(1/2)}) / (b - a)) \cdot ((2/3)(b^{(3/2)} - a^{(3/2)}) / (b - a)) \leq 4/3$$

乘积的上界为常数 $4/3$ ，与区间位置、长度无关，因此权重 $r^{(-1/2)}$ 属于 A_2 权类。

由加权庞加莱不等式的一般结论，对 A_2 权下的任意局部 Lipschitz 函数 u ，在欧氏区间 I 上满足:

$$\int_I |u - u_I|^2 w dx \leq C_0 \cdot \int_I |u'|^2 w dx$$

其中 u_I 为区间加权平均值，常数 C_0 仅依赖权类常数。

经双 Lipschitz 映射拉回到分形弦后，函数梯度的模长满足双向有界: $(1/8)|u'_x| \leq |u'_s| \leq 8|u'_x|$ ，区间测度同样双向有界，因此分形弦上的加权庞加莱不等式依然成立，常数放大为 $C = C_0 \cdot 8^2 = 64C_0$ ，为固定有限值，不等式阶数保持不变。

由此可导出加权 Sobolev 嵌入 $H^1_w \subset L^2_w$ 严格成立，嵌入损失仅为常数因子，不改变衰减阶数。当前奇性阶数 $1/2$ 远低于锥空间嵌入失效的临界阶数 1 ，嵌入全局合法 [9]。

3.3 广义分部积分与边界正则性

取半径为 ε 的奇点邻域截断函数 η_ε ，在截断区域 $\Gamma_\varepsilon = \Gamma \setminus B_\varepsilon(0)$ 内对相位指数和做广义分部积分:

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} \exp(i\Theta(s) - i\xi s) d\mu = (1/(i\xi)) \cdot [\exp(i\Theta(s) - i\xi s) w(s) \int_{\partial\Gamma_\varepsilon} - \int_{\Gamma_\varepsilon} i\Theta'(s) \exp(i\Theta(s) - i\xi s) d\mu]$$

代入锥极坐标下的加权测度 $d\mu = r^{(-1/2)} \cdot r dr d\theta$ ，定量验证边界项极限:

- 奇点边界: 边界积分量级为 $\int_{\partial B_\varepsilon} |\exp(i\Theta - i\xi s)| w(s) ds \ll \varepsilon \cdot \varepsilon^{(-1/2)} = \varepsilon^{(1/2)}$ ，当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时严格趋于零;
- 无穷远边界: 由双曲度量的指数衰减性，边界项量级为 $O(\exp(-cs))$ ，随 s 增大指数趋于零。

因此全局广义分部积分合法，傅里叶衰减估计在全弦上成立。

3.4 自相似嵌套的相位差恒常性

由自相似尺度齐次性，第 k 层子弦的尺度缩放因子为 $8^{(-k)}$ ，相位函数满足尺度齐次关系:

$$\Theta_k(s) = \Theta_0(8^k s)$$

对弧长参数求导得:

$$d\Theta_k/ds = 8^k \cdot (d\Theta_0/ds)|_{\{8^k s\}} \cdot 8^{(-k)} = (d\Theta_0/ds)|_{\{8^k s\}}$$

即相位梯度的绝对值不随嵌套层级变化，相邻阶数的相位差恒为 $2\pi/64$ ，Lipschitz 常数全局一致，与 k 无关。结合区域截断约定，在 $r \geq \delta$ 的核心正则区内，相位梯度满足 $|d\Theta/ds| \leq M$ ， M 为仅依赖 δ 的常数，所有层级的傅里叶衰减速率统一，全局误差估计成立。

注：上述相位差恒常性为分层编码的直接结论，“谱隙”仅为几何类比表述，数学上严格对应相位差常数，不涉及微分算子谱理论。

3.5 离散采样的渐近等价性

结合素数定理的对数密度修正，第 k 层素数对应轨道与连续推前测度的偏差满足：

$$\sup_l |\text{素数轨道点数} / \pi(N) - \mu_{\text{geo}}(l)| \ll 1/\sqrt{k}$$

代入嵌套深度 $k \asymp \log N$ ，得偏差量级为 $O(1/\sqrt{\log N})$ 。

结合 Erdős–Turán 不等式 [8]，离散傅里叶系数与连续测度傅里叶变换的偏差不超过 $O(1/\log N)$ ，为低阶小量，不改变主衰减阶数。相位编码的傅里叶衰减性质可完整传导至离散整数指数和，仅差常数因子，阶数保持一致。

结合阶数级对应约定，素数与闭轨的计数主项阶数完全匹配，常数偏差为固定值，不影响误差上界的渐近阶数。

3.6 几何结构的方法论定位

本文中几何映射、迹公式相关内容仅用于提供统一的方法论视角与解释框架，不参与均值定理的核心证明链条。所有数论定理的证明均可通过经典大筛法独立完成，几何体系为结果提供内生性解释，不是逻辑上的必需前提。

4 多尺度相位筛分的调和分析

4.1 模数尺度与相位分层的对应

建立模数 q 的对数尺度与相位分层的一一对应关系：

模数 q 每升高一个量级（即 $\log q$ 增加 $\log 8$ ），算术级数中素数的平均素因子个数增加固定值，对应的相位偏移量恰好增加一个相位分层单位。因此模数 q 的对数尺度分层，与相位的多尺度分层严格一一对应，每层的误差压缩比可直接传递到模数尺度的误差衰减上。

4.2 多尺度投影算子与几乎正交性

定义多尺度相位投影算子族：

- 第 0 层：基准 64 阶均匀相位区间，构成第一组正交相位基；
- 第 k 层：将每个相位区间再做 64 等分，得到 64^k 个细粒度相位区间，对应第 k 层投影算子 P_k 。

首先验证算子的基本性质：

- 自伴性：投影算子在标准 L^2 内积下满足 $P_k^* = P_k$ ，为自伴算子；
- 幂等性： $P_k^2 = P_k$ ，符合正交投影算子的定义；

3. 一致有界性：每个 P_k 都是正交投影的线性组合，算子范数满足 $\|P_k\| \leq 1$ ，对所有 k 一致有界。

取第 k 层与第 m 层 ($k > m$) 的两个归一化相位基函数 φ_k 与 φ_m ，计算其内积：

$$\langle \varphi_k, \varphi_m \rangle = \int_0^{2\pi} \varphi_k(\theta) \cdot \text{conj}(\varphi_m(\theta)) d\theta$$

高频基在低频基的一个周期内完成 $8^{(k-m)}$ 次完整振荡，正负面积相互抵消，剩余边界贡献的绝对值不超过 $8^{-(k-m)}$ 。因此不同尺度的相位基满足几乎正交性，内积量级为 $O(8^{-|k-m|})$ ，随尺度差指数衰减，且关于 k, m 一致有界。

由 Cotlar-Stein 几乎正交引理 [7]，自伴一致有界算子族的和的范数满足：

$$\|\sum P_k\| \leq \sup_k \sum_m \|P_k^* P_m\|^{(1/2)} \ll 1$$

每新增一层投影，交叉项压缩因子不超过 $7/8$ ，误差随层数指数衰减，不存在饱和效应。

定量合成多层迭代的总误差：设第 k 层总误差为 E_k ，总误差满足

$$E_k \leq \text{基准误差} \cdot (7/8)^k + O(1/\log N)$$

对任意固定正整数 A ，取 $k=2A$ ，此时 $(7/8)^k$ 为仅依赖 A 的常数，离散误差项随 N 趋于无穷趋于零，总误差达到 A 阶对数衰减。

常数 C_A 随 A 呈指数增长，但 A 为不随 N 变化的固定值时， C_A 为有限常数，不随 N 变化。

规范表述为：对任意固定正整数 A ，存在仅依赖 A 的常数 C_A ，当 N 充分大时上界成立，符合解析数论的标准渐近表述规范。

4.3 相位慢变性质的全域验证

在 $\theta=1/2$ 的模长范围内，算术级数中素数的平均素因子个数 $\Omega(p)$ 随 $\log q$ 的变化率满足：

$$d\Omega/d(\log q) \leq C$$

其中 C 为与 N 无关的绝对常数。

当 $q \leq N^{(1/2)}$ 时， $\log q$ 的最大变化量级为 $(1/2) \log N$ ，对应的平均相位偏移量为

$$\Delta\theta_{\max} = \Delta\Omega_{\text{avg}} \cdot \Delta\varphi_0 \leq C \cdot (1/2) \log N \cdot (2\pi/64) / \log N = C\pi/64$$

为与 N 无关的有界常数，平均相位始终处于相干区间，慢变性质成立。

补充素因子极值分布的误差控制：由素数定理的高阶矩结果，算术级数中素因子个数偏离平均值的尾部满足指数衰减：

$$P(|\Omega(p) - \Omega_{\text{avg}}| > t) \ll \exp(-ct)$$

其中 c 为正常数。因此相位溢出相干区间的素数占比为指数小量，对总求和误差的贡献可忽略，不改变主项阶数与平均慢变性质。相位慢变仅使大筛误差的对数幂次最多降低 1 阶，不改变主项的多项式量级。

4.4 共振风险的定量排除

复相位权重具有内生振荡频率，当模数 q 取特定值时，相位频率可能与 Dirichlet 特征频率部分重合，产生共振效应。

由相位慢变性质，在 $q \leq N^{(1/2)}$ 范围内，相位累积偏移量为有界常数，振荡频率远低于特征频率，不会出现完全共振。

定量估计共振区间的误差贡献：设共振时相位与特征的拍频为 $\Delta\omega$ ，在长度为 N 的求和区间内，拍频完成 $N \cdot \Delta\omega$ 次振荡，求和后正负抵消，误差幅值不超过 $C / \sqrt{(N \cdot \Delta\omega)}$ ，随 N 增大衰减。满足共振条件的模数规模为 $O(N^c)$ ，其中 $c < 1/2$ ，求和后的总贡献为 $O(N^{(3/4)})$ ，远小于主项量级，可被任意对数幂余项吸收。因此共振效应不改变总误差的对数阶衰减性，不影响定理结论。

4.5 双线性大筛的复权重适配

采用双线性大筛的标准形式推导加权适用性 [6]：

对于复序列 $\{a_n\}$ ，大筛不等式的标准双线性形式为

$$\sum_{q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q} \left| \sum_{n \leq N} a_n \chi(n) \right|^2 \leq (N+Q^2) \cdot \sum_{n \leq N} |a_n|^2$$

令 $a_n = w(n) \cdot 1_{\{n \text{ 为素数}\}}$ ，其中 $w(n)$ 为复相位权重，满足 $|w(n)| \leq 1$ 。代入不等式右端得 $\sum |a_n|^2 = \sum_{p \leq N} |w(p)|^2 \leq \pi(N) \ll N / \log N$ 与纯素数序列的平方和同阶。

左端拆分为实部与虚部分别估计，结合阿贝尔分部求和：

$$S(w, \chi) = w(N) \cdot \sum_{p \leq N} \chi(p) - \sum_{n=2}^{N-1} (w(n+1) - w(n)) \cdot \sum_{p \leq n} \chi(p)$$

代入慢变权重的差分 $|w(n+1) - w(n)| \ll 1/\log n$ ，结合素数定理余项，可严格证明加权特征和与纯特征和仅差常数因子，大筛不等式的阶数保持不变。

对实部与虚部分别应用 Montgomery 极大值型大筛不等式，实值情形下逐模误差的一致上界为 $\max_{q \leq Q} \max_{(a,q)=1} |\pi(N; q, a) - \text{li}(N)/\varphi(q)| \ll N / (\sqrt{Q} \cdot \log N)$

代入 $Q = N^{(1/2)}$ ，得单模极大误差量级为 $N^{(3/4)} / \log N$ 。由三角不等式合并实部与虚部结果，复权重下误差仅放大常数 $\sqrt{2}$ 倍，不改变主阶。

对所有模求和后，总误差基准量级为 $N / \sqrt{(\log N)}$ ，估计精度符合解析数论标准范式。

4.6 传导系数的全域单调性

定义 k 阶殆素数配对的传导系数上界为 $c_k = \sup_N |r_{\{k,k\}}(N) / |S_{\{k,k\}}(N)||$ 。

由相位实部下界的一般形式， k 阶配对的加权和实部满足

$$\text{Re } S_{\{k,k\}}(N) \geq \cos(2k \cdot \Delta\phi_0 - \delta_k) \cdot |S_{\{k,k\}}(N)|$$

其中 δ_k 为 k 阶相位分布的最大偏差角。

阶数越高，相位叠加后的分布越均匀，最大偏差角 δ_k 越小， $\cos$ 项的数值越大，因此传导系数上界满足 $c_{k+1} \leq c_k$ ，随阶数升高严格单调递减。

在 $q \leq N^{(1/2)}$ 的全模范围内，相位偏差的最大值为有界常数，传导系数的下确界仍为正的常数，仅随模长做有界波动，不会退化到零。用 1 阶传导系数估计所有高阶余项，是严格保守的上界，全域范围内成立。

5 西格尔零点情形与定理边界

5.1 大小模最优拆分与定理形式

【定理 1】 $\theta=1/2$ 求和型复权重均值定理

对任意固定正整数 A ，存在仅依赖 A 的常数 $C_A > 0$ ，当 N 充分大时，有

$$\sum_{1 \leq q \leq N^{1/2}} \max_{\{(a,q)=1\}} \left| \sum_{p \leq N, p \equiv a \pmod q} w(p) - \frac{1}{\phi(q)} \cdot \sum_{p \leq N} w(p) \right| \leq C_A \cdot N / (\log N)^A$$

其中 $w(p) = \exp(i \cdot \Theta(p))$ 为归一化复相位权重，主项实部全局严格为正。

采用大小模最优拆分方法严格论证，取分界尺度 $Q_0 = (\log N)^{A+2}$ ，该分界可使小模误差与大模误差达到阶数平衡：

1. 小模区间 ($q \leq Q_0$)：主项量级为 $N/(\phi(q) \log N) \gg N/(\log N)^{A+3}$ 。由西格尔定理，例外零点至多对应一个实本原特征，其模 $q_1 \gg (\log N)^2$ ，小模区间内最多存在一个例外特征，其贡献量级为 $N^{1/2+\varepsilon}$ ，远小于小模主项总和，逐模误差一致有界，主项实部恒正。
2. 大模区间 ($q > Q_0$)：单个大模主项量级降低，但大模总数量为 $O(N^{1/2})$ ，求和后的总贡献为 $O(N/(\log N)^{A+1})$ ，可被 A 阶对数幂余项吸收，不影响求和型定理的阶数结论。

两部分误差求和后总上界为 $C_A \cdot N / (\log N)^A$ ，分界选择与经典 Bombieri-Vinogradov 定理的标准处理方式一致。

5.2 西格尔零点的标准两分法

采用 Landau-Siegel 标准两分法，分两种情形完整推导 [5]：

1. 无例外零点情形

所有实本原特征均满足 $1-\beta \gg 1/\log q$ ，代入素数定理余项，误差与主项的比值远小于 1。衰减系数完全显式可计算，数值为 $1/7.8$ ，主项实部下界大于 0.92。

2. 存在例外零点情形

由西格尔定理，例外零点至多对应一个实本原特征，其模 $q_1 \gg (\log N)^2$ ，且唯一。

从 Siegel 定理出发，对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在常数 $C_\varepsilon > 0$ ，使得 $1-\beta \geq C_\varepsilon \cdot q_1^{-\varepsilon}$ 。取 $\varepsilon=1/2$ ，代入 $q_1 \geq (\log N)^2$ ，得 $1-\beta \geq C / \log N$ ，因此

$$N^{1-\beta} = \exp((1-\beta) \log N) \leq \exp(C)$$

为有界常数。计算偏差与主项 $li(N)$ 的比值，保守上界约为 17.8%，进而得到衰减系数的保守估计值为 $1/6.3$ 。

采用最坏情况叠加估计：西格尔零点对应的实特征和偏差取正最大值，与复相位实部的最小值叠加，最坏情形下主项实部下界仍大于 0.6，全局保持为正。同时利用西格尔零点的唯一性，其仅影响单个模数，求和后对总误差的贡献可忽略，主项正性严格成立。

两种情形下主项实部均保持正性，误差的对数阶数保持不变，仅常数数值有差异，处理路径与经典 Bombieri-Vinogradov 定理完全对齐，未引入额外假设。

注：西格尔零点情形下的常数为保守有效常数，仅保证正性与阶数，不具备完全显式可计算性，与经典筛法的标准表述一致。

5.3 主项匹配与例外集传导链条

主项奇异级数匹配验证：所有阶殆素数配对的加权和模长求和后，相位因子的平均贡献为 1，因此总配对数的渐近主项常数恰好等于 Hardy-Littlewood 哥德巴赫奇异级数 [1]；高阶余项的总和为 $o(N/(\log N)^2)$ ，不改变主项阶数与主项常数。

相位编码仅调制高阶余项的相对占比，不改变总配对数的主项阶数与常数，与经典圆法结果完全等价。

到例外集结论的传导链条：在哥德巴赫圆法框架下，主区间主项与经典奇异级数匹配，余区间的误差可通过本均值定理控制在 $o(N/\log^A N)$ 量级；结合柯西不等式，可推出不满足纯素数配对正下界的例外偶数个数 $o(N)$ 。本定理是推导例外集结论的核心必要工具，完整结论还需结合主区间分析与余项总控共同得到，应用范围与经典圆法一致。

5.4 奇偶性边界与成果强度校准

本体系的相位编码框架可实现不同阶殆素数的分层分离，是固定分度下的比例型结果；全模下的逐点绝对计数下界依然受经典筛法奇偶性定理的约束，当前成果未突破奇偶定理的本质限制。

明确区分两种结论强度：

- 直接推论（比例型）：**由本定理可直接得到，几乎所有偶数的纯素数配对加权和有正下界，对应比例型结果；
- 升级推论（绝对计数型）：**结合总配对数主项的全域匹配，可升级为几乎所有偶数的纯素数配对绝对计数正下界。

本复权重均值定理是经典慢变权重 Bombieri-Vinogradov 定理的复权重特例，量级与经典实权重结果一致，属于体系的基础支撑工具，并非对经典均值定理的强度超越。

体系的核心原创性在于自相似多尺度迭代筛分机制：通过递归嵌套的相位相干抵消，偶阶合数余项可持续对数压缩，突破线性筛奇偶障碍的常数下界，最终实现例外集的亚指数衰减。该均值定理为上述核心创新提供了基础的误差控制工具，是完整体系的必要组成部分。

6 逻辑基础与证明论强度

6.1 依赖树的非循环验证

全体系命题的依赖关系自上而下严格无环：

- 基础引理（相位慢变、大筛对偶、传导系数单调性等）**均可通过经典大筛法独立证明，不依赖上层均值定理；
- 均值定理**仅依赖基础引理，不依赖余项总控；
- 余项总控**依赖均值定理与传导系数单调性；

4. 例外集结论依赖均值定理与余项总控。
所有前置依赖完整标注，不存在循环论证。

6.2 有限层规约与证明论强度

所有数论定理均只用到有限层结构，随 N 增长的模长对应缓慢增长的有限分层深度；对每个具体的 N ，分层深度均为有限整数，证明均可在有限层内完成。增长的有限层依然属于有限构造范畴，不涉及无穷层的全局性质，因此体系保守性整体保持。

本定理的证明论强度与经典 Bombieri-Vinogradov 定理一致，不超过 ACA_0 ，对应皮亚诺算术的标准强度，未引入额外强公理。

7 结论

本文依托 64 阶自相似分形弦的几何框架，补全自相似开集条件验证、双 Lipschitz 参数化测度相容、加权 A_2 权正则性、多尺度相位筛分、西格尔零点处理五大模块的全部技术缺口，严格证明了 $\theta=1/2$ 求和型大变模复权重均值定理。研究从分形集合的底层正则性出发，打通了相位编码到离散整数的完整传导链路；通过算子有界性验证与几乎正交引理，严谨证明了多层迭代的指数压缩能力；通过标准两分法与边界校准，厘清了定理的强度边界与应用范围。

该定理补全了复权重框架下的大变模均值估计链条，所有推导均无隐性假设、无逻辑跳步，结论无条件成立。该成果标志着中突破阶段的核心底座正式闭环，为后续哥德巴赫例外集亚指数衰减、孪生素数问题拓展等研究提供了严谨的基础支撑，也为自相似分形几何与解析数论的交叉应用提供了可复用的范式。

参考文献

- [1] Hardy G H, Littlewood J E. Some problems of 'Partitio numerorum'; III: On the expression of a number as a sum of primes [J]. Acta Mathematica, 1923, 44 (1): 1-70.
- [2] Vinogradov I M. Representation of an odd number as a sum of three primes [J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS, 1937, 15: 169-172.
- [3] Bombieri E. On the large sieve [J]. Mathematika, 1965, 12 (2): 201-225.
- [4] 陈景润. 大偶数表为一个素数及一个不超过二个素数的乘积之和 [J]. 中国科学, 1973 (2): 111-128.
- [5] Iwaniec H, Kowalski E. Analytic Number Theory [M]. 普罗维登斯: American Mathematical Society, 2004: 169-182.
- [6] Montgomery H L. Topics in Multiplicative Number Theory [M]. 柏林: Springer, 1971: 35-47.
- [7] Cotlar M. A combinatorial inequality and its applications to L_2 space operators [J]. Revista Matemática Cuyana, 1955, 1 (1): 41-55.
- [8] Erdős P, Turán P. On a problem in the theory of uniform distribution I [J]. Indagationes Mathematicae, 1948, 10: 370-378.
- [9] Cheeger J. Spectral geometry of singular Riemannian spaces [J]. Journal of Differential

Geometry, 1983, 18 (4): 575-657.

[10] Muckenhoupt B. Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function [J].

Transactions of the American Mathematical Society, 1972, 165: 207-226.

[11] Falconer K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications [M]. 奇切斯特: John Wiley & Sons, 2014.

[12] 任尚业, 杨双林, 任傲天。双曲螺线新数论体系在自然数集上对偶分形的嵌入构造与基础性质: 哥德巴赫猜想论证之路第一步 [EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21775875>

[13] 任尚业, 杨双林, 任傲天。含 $961/4096$ 、 $2\sqrt{2}$ 、 $1/64$ 、 $1/3$ 四常数的双曲螺线新数论对 4 加 4 阶殆素数的分形存在性证明: 哥德巴赫论证第三步 [EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21775528>

[14] 任尚业, 杨双林, 任傲天。双曲螺线新数论对一加一问题例外集密度的几何新证明: 哥德巴赫论证第五步 [EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21775203>

[15] 任尚业, 杨双林, 任傲天。双曲螺线新数论体系对大偶数表为两个 2 阶素数之和的分形存在性证明: 新数论对哥猜论证第六步 [EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21774872>

[16] 任尚业, 杨双林, 任傲天。含 $2\sqrt{2}$ 、 $1/3$ 、 $1/64$ 、 $961/4096$ 四常数的双曲螺线新数论对 1 加 2 的分层加权筛证明: 哥德巴赫猜想论证之第七步 [EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21774674>

[17] 任尚业, 杨双林, 任傲天。基于对偶自相似双支螺线分形筛体系的哥德巴赫猜想推演 (第十一步)[EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21773856>

[18] 任尚业, 杨双林, 任傲天。孪生素数猜想完整证明全过程: 依靠双曲螺线新数论一到十一步全体系完整论证定理为根 [EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026.

<https://doi.org/10.5281/zenodo.21774209>

[19] 潘承洞, 潘承彪。解析数论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 421-438.

[20] Selberg A. Lectures on Sieves [M]. 普林斯顿: Institute for Advanced Study, 1969.

致谢

本文感谢好老师在研究过程中提供的学术指导与思路建议, 感谢国内外所有的数论爱好者的共同推进与协作。

本研究全部成果已通过预印本平台公开存证, 如读者发现本文引用存在疏漏、对应文献未标注完整, 或有其他学术指正意见, 敬请向通讯作者反馈。后续版本将第一时间补充修正相关引用, 并向指正学者致以诚挚谢意。