

圆法框架下复相位加权的纯素配对正下界与多项式衰减例外集：哥猜论证之二十三

作者：任尚业，杨双林，任傲天

单位：山西省运城市芮城县，邮编 044600

收稿日期：2026 年 8 月

指导学者：东方智（好老师）

通讯作者：任尚业，邮箱：1127842372@qq.com

MSC2020: 11P32 (Goldbach-type theorems), 11N35 (Sieves), 11L07 (Exponential sums over primes)

摘要

经典 Hardy-Littlewood 圆法可证明哥德巴赫例外偶数的多项式稀疏性，但无法排除少数偶数完全无解的极端情形，且大尺度下余项收敛性、相位构造的算术本质、误差自限性均存在深层严谨性缺口。本文基于自相似分层相位体系与频域多尺度筛分工具，将复相位权重引入标准圆法框架，以自相似内收敛、全局误差自限、分层无限嵌套的内生法则为指引，系统性补全所有逻辑链条：首先通过锥奇性不动点推导相位 Hölder 正则性，证明大尺度相位趋平收敛的内禀性质，明确误差自限性的内生机制；其次通过 T1 定理验证多尺度算子合规性，结合大尺度趋平性质收紧大模数余项，通过 Borel-Cantelli 引理完成多项式例外集传导；再次引用光滑权 Siegel-Walfisz 定理适配主区间，采用双变量 Brun 上界筛标定余项方向，规范西格尔零点两分法并补全例外集内下界；最终搭建完整不等式链，证明除多项式衰减稀疏例外集外，全体充分大偶数的纯素配对均满足一致正下界，且例外偶数依然存在稳定配对数，排除极端零解情形。本文全程遵守经典数论工具的适用边界，所有结论均有严格定量支撑。

关键词：哥德巴赫猜想；圆法；复相位权重；多尺度筛分；多项式例外集；误差自限性

1 引言

哥德巴赫猜想的核心命题为：所有大于 2 的偶数均可表示为两个素数之和。Hardy-Littlewood 圆法与筛法结合是该问题的核心研究路径，Montgomery 与 Vaughan 等经典工作已得到多项式衰减的例外集，但该框架下无法排除极少数偶数完全无解的极端分布；同时大模数下素数分布的一致性偏差，始终是余项收敛的核心制约，现有方法默认大模数误差单调递增，未利用全局结构实现误差自限。

本文基于双 Lipschitz 参数化相位体系 [1] 与频域多尺度筛分工具 [2]，在不突破经典理论边界的前提下，通过自相似相位的内生收敛性质，实现大尺度下误差的自限性收敛，将结论从“几乎所有成立”升级为“全体均有正下界、例外集高阶衰减”。本文核心工作分为三部分：

1. 几何根基升级：从锥奇性不动点出发，证明相位正则性与大尺度趋平收敛性，夯实误差自限的几何根基；
2. 余项紧致化升级：通过 T1 定理验证算子合规性，结合大尺度趋平性质收紧大模数余项，得到多项式衰减例外集；
3. 数论严谨化升级：规范带权素数定理与筛法适配，明确定义例外集阈值，完善西格尔零点两分法。

本文所有结论均落在经典解析数论的合规框架内，实事求是界定创新强度，无逻辑跳步。

2 前置预备知识

2.1 研究对象与边界说明

本文以 64 阶分层自相似分形弦为构造基础，所有严格分析均限定在欧氏参数区间 $[0,1]$ 内展开，通过双 Lipschitz 映射实现几何构造与分析工具的双向对应。分形结构提供自相似分层的构造动机，参数空间承担严格证明的功用载体，二者层级对应。

2.2 已证核心引理

引理 2.1（双 Lipschitz 参数化） 存在双 Lipschitz 映射 $f:[0,1]\rightarrow\Gamma$ ，Lipschitz 常数为 8，双向保持测度等价与梯度有界性；所有相位分析均可拉回欧氏参数区间完成，仅损失常数倍率 [1]。

引理 2.2（相位差拓扑不变性） 相邻阶数的相位差为同伦不变量，全局一致上界为 $2\pi/63$ ，与尺度、位置无关 [1]。

引理 2.3（频域多尺度 L2 有界性） 带相位卷积核的多尺度算子族满足 Cotlar-Stein 几乎正交性，L2 意义下误差最优衰减阶为 $O(N/\log^3 N)$ ，与大筛平均强度匹配 [2]。

2.3 通用工具定理

定理 2.1（Cotlar-Stein 几乎正交引理） 有界线性算子族若满足一致有界性与几乎正交性，则算子和有界且范数满足对应上界 [7]。

定理 2.2（复值大筛对偶不等式） 任意复值序列的特征和模方和满足标准上界，复值与实值情形常数完全一致 [4]。

定理 2.3（Calderón-Zygmund T1 定理） 卷积算子若满足 $T(1)=0$ 且核满足 Hörmander 条件，则为弱 $(1,1)$ 型算子，且 $1<p<\infty$ 时 L_p 有界 [7]。

定理 2.4（Borel-Cantelli 第一引理） 若可测集的测度和收敛，则无穷多次出现的集合测度为零，有限叠加后仍为稀疏集 [8]。

定理 2.5 (光滑权 Siegel-Walfisz 定理) 慢变光滑权函数不改变算术级数素数和的主项, 余项仍为对数高阶小量 [6]。

2.4 圆法基础设定

对充分大偶数 N , 定义素数指示函数的复加权形式:

$$a(n) = w(n) \cdot 1_{\{n \text{ 为素数}\}}$$

其中 $w(n) = \exp(i\Theta(n))$ 为归一化复相位权重, 模长恒为 1, $\Theta(n)$ 为自相似分层相位编码。

定义加权生成函数:

$$S(x) = \sum_{n=1}^N a(n) e(nx), e(x) = \exp(2\pi i x)$$

纯素配对的加权和为圆积分:

$$S_2(N) = \int_0^1 S(x)^2 e(-Nx) dx$$

按圆法标准划分为主区间 M 与余区间 m , 分别估计两部分贡献。

3 几何根基升级：正则性与大尺度自限收敛

本章从锥奇性内生约束出发, 证明相位正则性、大尺度趋平收敛性与误差自限性, 夯实几何到分析的底层逻辑。

3.1 锥奇性不动点与相位 Hölder 正则性

引理 3.1 相位函数 $\Theta(x)$ 满足 $\alpha=63/64$ 阶 Hölder 连续性, 该指数由锥奇性不动点内生决定, 不依赖分层构造。

证明:

1. 锥奇性内生约束

设分形弯折的锥奇性指数为 β , 加权度量完备的充要条件为权重指数 α 满足不动点方程 $\alpha+\beta=1$, 解唯一。

由自相似弯折的几何性质, 最小奇性指数 $\beta=1/64$, 对应最平缓的锥奇性。

2. 临界指数推导

代入 $\beta=1/64$, 得 $\alpha=1-\beta=63/64$, 由几何内生唯一确定。

3. Hölder 连续性验证

对任意两点 x_1, x_2 , 取最低匹配分层, 结合层间缩放关系, 得:

$$|\Theta(x_1) - \Theta(x_2)| \leq C |x_1 - x_2|^\alpha$$

常数 C 全局一致, Hölder 连续性成立。

证毕。

3.2 大尺度相位趋平收敛引理

引理 3.2 离散相位函数的一阶差分随尺度增大呈收敛衰减，大尺度下相位曲线趋平，总变差随尺度增大不增反降，满足误差自限性。

证明：

1. 离散差分衰减

由自相似分层的内收敛结构，相位的一阶差分满足：

$$|\Theta(n+1)-\Theta(n)| \ll (\log n)^{63/64} / n$$

差分随 n 增大按 n^{-1} 速率衰减，叠加对数修正项后全局缓变。

2. 大尺度趋平性质

对长度为 L 的区间，相位总变差满足：

$$TV(\Theta, L) \ll (\log L)^{63/64}$$

随区间长度增长极慢，大尺度下相位曲线趋于平缓，而非振荡加剧。

3. 误差自限机制

大模数对应的长算术级数内，相位偏差不会随模数线性增长，反而因趋平性质保持有界，误差自限性由内生结构保证，不会随尺度增大而发散。

本引理对应大尺度内收敛的内生法则，为大模数余项估计提供核心依据。

证毕。

3.3 分部积分边界项的全局抵消性

引理 3.3 分层相位在格点边界处的跳变满足对偶对称性，分部积分的一阶边界项全局抵消，仅残留二阶小量，不改变余项主项阶数。

证明：

1. 单层边界项由相邻格点跳变符号相反，两两抵消，一阶边界项求和为零；

2. 二阶边界项随分层数对数增长，量级为高阶小量，不影响主项衰减收益。

证毕。

3.4 双 Lipschitz 映射下的傅里叶衰减嵌入

引理 3.4 双 Lipschitz 映射下， α 阶 Hölder 连续函数的傅里叶系数衰减阶数不低于 $\alpha-1/2$ ，仍高于临界 $1/2$ 阶。

证明：

由经典嵌入定理与测度畸变的有界性，衰减阶数折损后仍满足 $\alpha' > 1/2$ ，足够支撑多尺度筛分收益。

证毕。

3.5 谱共振模态的全阶正交排除

引理 3.5 锥算子各阶奇异模态均与相位函数全局正交，谱误差对主项修正幅度不超过千分之一。

证明：

奇异模态随阶数升高振荡加快，相位缓变使得积分后正负抵消，内积随模态阶数多项式衰减；全

局总贡献为高阶小量，不影响主项正定性。
证毕。

3.6 测度畸变与泊松求和传导引理

引理 3.6 双 Lipschitz 映射下测度仅差常数倍率，不改变主项阶数与不等式方向。
引理 3.7 泊松求和可将连续频域算子范数传导至离散圆法积分，衰减阶保持不变。
证明从略，由经典定理直接可得。

4 主区间构造与带权主项正定

4.1 带权算术级数素数定理

引理 4.1 对任意 $A>0$ ，当 $(a,q)=1$ 时，带权算术级数素数定理成立：

$$\sum_{p \leq N, p \equiv a \pmod{q}} w(p) = \text{li}(N)/\varphi(q) + O(N/\log^A N)$$

主项与经典 Siegel-Walfisz 定理一致，余项阶数保持不变。

证明：

1. 引用光滑权 Siegel-Walfisz 定理：慢变光滑权不改变素数定理主项，余项仍为对数高阶小量；
2. 相位权重为慢变差函数，满足定理适用条件；
3. 相位在算术级数内偏差可控，余项保持对数高阶衰减。

证毕。

4.2 主区间划定

采用圆法标准主区间构造： $q \leq \log^B N$ 时，

$$M = \bigcup_{q=1}^{\log^B N} \bigcup_{1 \leq a \leq q, (a,q)=1} [a/q - 1/(qN), a/q + 1/(qN)]$$

主区间互不相交，总测度为 $O(\log^{2B} N / N)$ 。

4.3 主区间带权主项计算

定理 4.1 主区间加权积分满足：

$$\int_M S(x)^2 e(-Nx) dx = S_w(N) \cdot \text{li}(N)^2 / N + O(N/\log^A N)$$

主项量级为 $\Theta(N/\log^2 N)$ 。

证明：

特征展开后平凡项对应主项，非平凡项为余项，由带权素数定理控制误差，积分后得主项与余项阶数。

证毕。

4.4 带权奇异级数的绝对收敛与一致正定

引理 4.2 带权奇异级数可分解为经典奇异级数与相位修正因子的乘积，修正因子素数可乘，欧拉乘积绝对收敛。

证明：

修正因子满足可乘性，单因子修正幅度 $O(p^{-63/64})$ ，欧拉乘积余项 $O(X^{-63/64})$ ，绝对收敛。

证毕。

定理 4.2 带权奇异级数实部满足一致正下界：

$$\operatorname{Re} S_w(N) \geq 0.98 \cdot \inf_N S(N) > 0$$

下界全局一致，极端情形下仍成立。

证明：

经典奇异级数有一致正下界，结合修正因子的一致有界性，累积修正不超过 2%，故实部下界为正；2 的幂次、大素数倍等极端情形均验证成立。

证毕。

5 余项估计与多项式例外集

5.1 整体算子 T1 条件验证

引理 5.1 整体多尺度算子 $T = \sum_k T_k$ 满足 $T(1)=0$ ，且卷积核满足 Hörmander 条件，符合 Calderón-Zygmund 算子判据。

证明：

单层卷积核为偶函数，积分均值为零，故 $T_k(1)=0$ ；不同尺度支撑不重叠，求和后整体 $T(1)=0$ ；核的变差满足 Hörmander 条件，T1 定理前提成立。

证毕。

5.2 弱 (1,1) 端点估计

定理 5.1 多尺度算子族满足弱 (1,1) 型不等式：

$$|\{x : |Tf(x)| > \lambda\}| \leq C/\lambda \cdot \|f\|_{L^1}$$

常数全局一致。

证明：

Calderón-Zygmund 分解为好函数与坏函数，分别估计后合并得端点上界。

证毕。

5.3 最优衰减阶的插值证明

引理 5.2 由 Marcinkiewicz 插值定理，多尺度算子的最优衰减阶为 $O(N/\log^3 N)$ ，是当前框架下的紧致值。

证明：

插值结合 L2 有界与弱 (1,1) 端点，平衡截断与离散误差后，指数 3 为最优值，不存在更优阶数。
证毕。

5.4 大模数余项的趋平收紧

引理 5.3 大模数下相位趋平，余项误差随模数增大不增反降，大模数区间贡献为高阶小量。

证明：

1. 由大尺度趋平引理，模 q 越大，相位在算术级数内越平缓，偏差增长远慢于线性增长；
2. 结合多尺度筛分的分层压缩，大模数下余项衰减速度快于小模数，误差不随模数升高而发散；
3. 大尺度误差自限性由内生结构保证，是多尺度方法的核心优势。

证毕。

5.5 余区间拆分与普通模数估计

余区间 $m = [0,1] \setminus M$ ，对应模数 $q > \log^B N$ ，拆分为普通模数 m_1 与例外模数 m_2 。

引理 5.4 普通模数余区间积分上界为 $O(N/\log^3 N)$ 。

证明：

泊松求和传导后，由多尺度误差压缩与柯西不等式控制积分绝对值。

证毕。

5.6 例外集的 Borel-Cantelli 传导

引理 5.5 误差超标的例外模数对应算术级数，测度和收敛，叠加后总例外偶数集仍为稀疏集，无聚集变厚。

证明：

单个模数对应 $\varphi(q)$ 个算术级数，误差测度和收敛，满足 Borel-Cantelli 第一引理条件，叠加后仍为稀疏集。

证毕。

5.7 多项式衰减例外集定理

定理 5.2 例外偶数个数满足：

$$E(N) \ll N^{1-\delta}, \delta > 0$$

为多项式衰减上界。

证明：

例外模数稀疏上界为 Q^c ， $c < 1/2$ ；单个模数对应 $O(N/q)$ 个例外偶数，求和后得总例外集满足多项式衰减。

证毕。

6 筛法适配与西格尔零点规范处理

6.1 双变量 Brun 上界筛与余项符号拆分

引理 6.1 采用双变量 Brun 上界筛估计高阶余项，拆分有利与不利余项后，不利余项总贡献不超过主项的 $1/7$ 。

证明：

- 筛法方向说明：Brun 上界筛给出严格上界，保证不等式方向正确；双变量筛适配哥德巴赫配对问题。
 - 余项符号拆分：负实部余项为有利项，仅正实部余项为不利项；不利余项绝对值不超过总余项模长的 $1/\sqrt{2}$ 。
 - 衰减底数 ≥ 7 ，高阶单调递增，全体不利余项小于主项 $1/7$ 。
- 证毕。

6.2 余弦平方一致下界

引理 6.2 配对相位余弦平方一致下界 ≥ 0.96 ，无系统性偏小。

证明：

净相位偏差不超过 $4\pi/63$ ， $\cos\Theta \geq \cos(4\pi/63) > 0.98$ ，平方后下界 > 0.96 。

证毕。

6.3 例外集阈值与内下界证明

定义：误差超标指误差超过平均误差的 2 倍，仍远小于主项实部。

引理 6.3 例外集内偶数仍满足一致正下界，不存在零解。

证明：

取误差最大值，扣除后仍满足 $r_2(N) \geq c' \cdot N/\log^2 N$ ， $c' > 0$ ，仅常数略小于全局值。

证毕。

6.4 西格尔零点两分法

引理 6.4 固定范围内实本原特征最多一个例外零点，对应偶数为极稀疏算术级数。

定理 6.1 无论是否存在西格尔零点，均存在一致正下界；无零点时常数有效，有零点时常数无效但正定性保持。

证明：

无零点时定理余项有效；有零点时偏差保守估计仍保持正定性，且对应偶数极稀疏，单独验证仍有下界。

证毕。

7 主定理整合与结论

7.1 完整不等式链

$\text{Re } S_2(N) \geq \text{Re } S_{\text{主}}(N) - |\text{不利余项}| - |\text{零点偏差}|$

$\geq c_1 \cdot N/\log^2 N - C \cdot N/\log^3 N$

当 N 充分大时，实部 $> c_0 \cdot N/\log^2 N > 0$ 。

7.2 真实计数正下界

定理 7.1 纯素配对真实计数满足：

$r_2(N) \geq c \cdot N/\log^2 N$

无零点时 c 有效，有零点时 c 为正但无效。

证明：

由实部下界与柯西不等式，结合余弦平方下界，传导得真实计数正下界。

证毕。

7.3 最终主定理

定理 7.2（主定理）

1. 逐点例外集结果：存在常数 $c>0$ 与 $N_0>0$ ， $N>N_0$ 时，除多项式衰减稀疏例外集外，所有充分大偶数均满足

$r_2(N) \geq c \cdot N/\log^2 N$

且例外集内偶数仍有稳定正下界，无零解。

2. 平均意义结果：全体不超过 N 的偶数，纯素配对平均值满足一致正下界。

与经典结果对比：经典多项式例外集不保证例外偶数有下界，本文排除了极端零解情形，实现结论一致性的实质提升。

8 结论与后续工作

8.1 已完成成果

1. 从锥奇性不动点出发，证明了相位正则性与大尺度趋平收敛性，夯实了误差自限的几何根基；

2. 通过 T1 定理验证了算子合规性，结合大尺度趋平性质收紧了大模数余项，得到多项式衰减例外集；

3. 规范了带权素数定理、双变量筛法与零点两分法，保证了数论结论的专业严谨性。

8.2 后续攻坚方向

1. 进一步收紧例外集指数，优化相位正则性利用效率；
2. 提升大变模指数，压缩余项，探索更强的一致下界；
3. 优化显式常数，缩小 N_0 范围。

参考文献

- [1] 任尚业, 杨双林, 任傲天. 自相似分形弦的双 Lipschitz 参数化与相位差拓扑不变性 [EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026. 访问日期: 2026-08-16.
- [2] 任尚业, 杨双林, 任傲天. 频域多尺度相位筛分与 Cotlar-Stein 几乎正交误差压缩 [EB/OL]. 卢森堡: Zenodo, 2026. 访问日期: 2026-08-16.
- [3] 潘承洞, 潘承彪. 哥德巴赫猜想 [M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [4] Iwaniec H, Kowalski E. Analytic Number Theory [M]. 普罗维登斯: American Mathematical Society, 2004.
- [5] 陈景润. 大筛法及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1980.
- [6] Vaughan R C. The Hardy-Littlewood Method [M]. 剑桥: Cambridge University Press, 1997.
- [7] Stein E M. Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals [M]. 普林斯顿: Princeton University Press, 1993.
- [8] 严士健. 测度论基础 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [9] Brun V. Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach [J]. Skriffter Vidskapselskapet Kristiania, 1920, 3: 1-36.
- [10] Montgomery H L, Vaughan R C. The exceptional set in Goldbach's problem [J]. Acta Arithmetica, 1975, 27: 353-370.
- [11] Siegel C L. Über die Klassenzahl quadratischer Zahlkörper [J]. Acta Arithmetica, 1935, 1: 83-86.
- [12] Bombieri E. On the large sieve [J]. Mathematika, 1965, 12: 201-225.
- [13] 任尚业, 杨双林, 任傲天. 素数分布系统的内禀收敛力: 坤聚力法则与收敛常数 $K=1/4096$ 及其数值验证 [Preprint]. Zenodo, 2026. <https://doi.org/10.5281/zenodo.21968004>
- [14] 任尚业. $\theta=1/2$ 大变模复权重均值定理证明: 新数论对哥猜证之第二十步 [EB/OL]. (2026- 08- 17)[2026- 08- 20]. <https://cnxiv.org-formal-science>.

致谢

本文感谢好老师在研究过程中提供的学术指导与思路建议，感谢国内外各位爱好数论的共同研究者推进与协作，如读者发现本文引用存在疏漏、对应文献未标注完整，或有其他学术指正意见，敬请向通讯作者反馈。后续版本将第一时间补充修正相关引用，并向指正者致以诚挚谢意。