自然数集上对偶双支对数螺线嵌入构造：64 阶新数论体系 新一版

——基于 961/4096 权重常数的构造性研究

数论几何与分形构造系列研究 · 标度嵌入篇

作者：任尚业 杨双林 任傲天

地址：山西省运城市芮城县

邮箱：1127842372@qq.com

指导学者：华老师

摘要

本文构建第一版补充优化版自然数平面嵌入构造，核心方程完整如下：

几何底座：对偶双支对数螺线，扩张支满足 $r_+(\theta) = r_0 \cdot e^{(\alpha\theta)}$，收缩支满足 $r_-(\theta) = r_0 \cdot e^{(\alpha(\theta+\pi))}$；其中扩张系数 $\alpha = \ln 64/(2\pi)$，每旋转 2π极径放大 64 倍，具备严格几何自相似性。

权重体系：基准权重常数 C=961/4096，收缩支权重 $\rho_-(n) = (961/4096)\cdot(2-\theta_eq/\pi)^2$，扩张支权重 $\rho_+(n) = 1-\rho_-(n)$，几何角度与权重相位全域统一。

本文采用三层复合映射框架构建嵌入体系，严格证明四项基础性质：其一，定位映射为严格单射，不同自然数对应互不重合的几何点位；其二，等效相位与收缩支权重在[0,2π]区间内构成单调双射关系，可双向精准互解；其三，双支权重全域严格守恒，有效扩张权重随相位单调变化；其四，连续螺线形态具备严格几何自相似性，64 倍标度缩放对应极径精准放大 64 倍、相位整周期旋转。本文为构造性研究成果，可为整数密度统计、跨尺度分层分析与分形谱计算提供数理支撑。

关键词：自然数嵌入；对偶双支对数螺线；961/4096 权重常数；几何自相似；单调双射；标度协变性

1 引言

1.1 研究背景

自然数的平面几何嵌入是数论几何领域的经典研究方向，核心是通过连续几何载体刻画离散整数的分布规律与分层结构。不同几何底座具备差异化的代数属性：线性均匀螺线适配经典数论的二次同余对应与圈层密度定量计算；非线性对数螺线凭借天然的标度不变性与嵌套结构，更适配整数跨尺度分层解析与系统性结构研究。

对偶双支对数螺线具备对称耦合、等角自相似的核心几何特征，其参数此消彼长的制衡规律，与自然数复杂度分层、素性-合性二元制衡的离散特征高度契合。为覆盖多元化研究需求，本体系在阿基米德底座、1/4 权重对数底座之外，增设第一版完善 961/4096 权重的双支对数螺线嵌入方案。

1.2 本文定位与边界

本文为纯构造性技术文档，核心完成四项工作：给出映射的严格数学定义；证明映射的良定义性、单射性与守恒性；给出 64 倍标度变换下的协变关系；明确其适用边界与局限。本文不宣称对任何特定数论命题的直接证明效力，后续专项研究均在此底座之上展开。

2 新一版并行构造选型对比

2.1 二版核心方程总览

2.1.1 第一版（阿基米德底座版）

定位螺线：$r(n) = \sqrt{n}$，$\theta_{geo}(n) = (2\pi/8)\cdot\sqrt{n}$

权重方程：$\rho_{-}(n) = (961/4096)\cdot(2-\theta_{eq}/\pi)^2$

特征：几何角度与权重相位两套体系分离，天然对应二次同余类，适配经典数论计算。

2.1.2 第二版（对数螺线 1/4 权重版）（启发对照可用）

定位螺线：$r_{+}(\theta) = r_0\cdot e^{\wedge}(\alpha\theta)$，$r_{-}(\theta) = r_0\cdot e^{\wedge}(\alpha(\theta+\pi))$，$\alpha = \ln 64/(2\pi)$

权重方程：$\rho_{-}(n) = (1/4)\cdot(2-\theta_{eq}/\pi)^2$

特征：几何角度与权重相位统一，严格几何自相似，适配分形形态对应与可视化。

2.1.3 新一版（双支对数 961/4096 权重版）（为第一版优化补充版）

定位螺线：几何形态与第二版一致，同为对偶双支对数螺线，具备双曲度量下能量极小稳态的几何背景

权重方程：$\rho_{-}(n) = (961/4096)\cdot(2-\theta_{eq}/\pi)^2$

特征：内生权重常数匹配分形层级规则，一套角度体系统一，适配分形谱分析与跨尺度

结构研究。

2.2 三版核心差异总表

对比维度	第一版（阿基米德底座版）	第二版（对数螺线 1/4 权重版）	第一版优化补充（双支对数 961/4096 权重版）
几何底座	阿基米德型均匀外扩螺线	对偶分形对数螺线	对偶双支对数螺线（双曲背景）
基准权重常数	961/4096	1/4	961/4096
角度体系	两套分离（几何角、权重相位独立）	一套统一	一套统一
自相似性质	统计自相似（近似协变）	严格几何自相似	严格几何自相似
核心适配	经典数论对接、圈层密度计算	分形嵌套、几何形态对应	分形谱分析、跨尺度结构研究
体系定位	主力量算版	形态对应启发备用版	谱分析常用版

注：三版均为严格自洽的数理模型，分别服务不同研究方向，同步保留独立首发权。

3 记号约定与核心常数

正自然数集记为 $N^* = \{1,2,3,\ldots\}$，全文研究范围限定为全体正整数；平面点位统一采用极坐标(r, θ)表示，r 为极径，θ为累计极角，逆时针为极角正方向。

3.1 几何标度常数

一、分形标度单元 $M = 64$，作为本嵌入体系的标准缩放周期，支撑全域标度不变性；

二、螺线扩张系数 $\alpha = \ln 64/(2\pi) \approx 0.2972$，约束螺线缩放规律，是几何自相似性的核心参数，保证每完成 2π完整旋转，极径精准放大 64 倍。

3.2 权重体系常数

一、基准权重常数 C = 961/4096 = (31/64)²，由 64 阶分形层级规则内生确定，为收缩支权重的幅值基准；

二、一阶耦合系数β = 1/3，修正双支螺线交叠区域的非线性数值关联，表征双支权重的制衡耦合强度；

三、初始相位 $\theta_0 = 4.75\pi$，定义自然数序列的起始相位，保证全域数值排布的连续性与规范性。

4 第一版优化补充：三层嵌入映射构造

本体系嵌入由三层映射顺序复合构成，整体映射记为 Ψ(n) = (Φ(n), θ_eq(n), W(n))，后层映射不反向修改前层的取值，层级关系清晰。

4.1 第一层：定位映射（双支螺线几何本体）

全体自然数的点位唯一对应于对偶双支对数螺线轨迹，构成离散整数的连续化几何骨架。双支螺线固定相位差π，形成对称耦合的嵌套结构，为双曲度量下的能量极小稳态解。

4.1.1 累计极角映射

$\theta(n) = \theta_0 + (2\pi/\ln 64) \cdot \ln n$

极角与自然数的自然对数值呈线性关联，保障 64 倍标度缩放对应完整相位周期旋转，是几何自相似性的相位基础。

4.1.2 扩张支与收缩支螺线

扩张支基准螺线：$r_+(n) = r_0 \cdot e^{(\alpha \cdot \theta(n))}$

收缩支对偶螺线：$r_-(n) = r_0 \cdot e^{(\alpha \cdot (\theta(n)+\pi))}$

基准算例取 $r_0=1$，该取值仅改变整体尺度，不改变映射单射性、自相似性等核心数理性质。

4.1.3 定位映射定义

$\Phi(n) = (r_+(n), \theta(n))$

自然数的平面唯一坐标由扩张支基准点位确定，收缩支为对偶对称结构。

4.2 第二层：等效相位映射（相位归一化）

$$\theta_{eq}(n) = \theta(n) \bmod 2\pi,\quad \theta_{eq} \in [0, 2\pi)$$

对累计极角进行 2π取模归一化处理，将无限域相位折叠至单周期区间，为权重计算提供标准化的相位变量。每个自然数对应唯一的等效相位，无歧义、无重叠。

4.3 第三层：对偶权重映射（数值量化体系）

以归一化等效相位为唯一自变量，构建双支权重量化模型，表征自然数在嵌入体系中的数值制衡与分布特征。

4.3.1 收缩支权重

$$\rho_-(n) = C \cdot (2 - \theta_{eq}/\pi)^2 = (961/4096) \cdot (2 - \theta_{eq}/\pi)^2$$

收缩支权重表征内向收敛螺线扫过区域的面积占比，幅值由基准常数 C 约束。

4.3.2 扩张支权重与守恒律

$$\rho_+(n) = 1 - \rho_-(n)$$

全域严格满足面积守恒关系：$\rho_- + \rho_+ \equiv 1$，二者此消彼长，总和恒为常数。

4.3.3 有效扩张权重

$$\rho_+'(n) = \rho_+(n) + \beta \cdot \rho_+(n) \cdot \rho_-(n) = \rho_+(n) + (1/3)\cdot\rho_+(n)\rho_-(n)$$

引入一阶耦合修正，得到更贴合几何分布的有效权重，仍保持有界与单调。

4.3.4 权重映射整体

$$W(n) = (\rho_-(n), \rho_+(n), \rho_+'(n))$$

5 基础性质严格证明

5.1 良定义性

定理 5.1 对任意自然数 $n \in N^*$，三层复合映射$\Psi(n)$的所有输出分量唯一确定，全域映射良定义无歧义。

证明:

一、任意确定正整数 n 的自然对数值 ln n 为唯一实数，无多解性；

二、累计极角、螺线极径均由初等确定性函数运算得到，结果唯一；

三、自然数全体满足 n≥1，等效相位取模结果唯一落在[0,2π)区间；

四、双支权重与有效扩张权重均为确定性初等运算，输出数值唯一。

综上，本嵌入体系全域良定义。

5.2 定位映射的单射性

定理 5.2 定位映射Φ: $N^* \to R_+ \times [0,+\infty)$为严格单射，任意两个不同的自然数，对应平面上互不重合的几何点位。

证明:

任取 $n_1, n_2 \in N^*$且 $n_1 < n_2$，由自然对数函数的严格单调递增性，得 $\ln n_1 < \ln n_2$，代入极角公式得$\theta(n_1) < \theta(n_2)$。

对数螺线极径随极角严格单调递增，故 $r_+(n_1) < r_+(n_2)$。

两点极径严格不等，因此必然不是同一平面点位，即$\Phi(n_1) \neq \Phi(n_2)$，定位映射单射性得证。

已通过程序逐点核验 n=1 至 n=262144 全域离散点，未出现点位重合，与定理结论完全一致。

5.3 相位与权重的双向对应关系

定理 5.3 在等效相位区间[0,2π]上，收缩支权重函数为严格单调递减的连续函数，二者构成闭区间双射，值域为[0, 4C] = [0, 3844/4096]，反解公式为：

$$\theta_eq = \pi \cdot \left(2 - (64/31) \cdot \sqrt{\rho_}\right)$$

补充说明：该双射关系仅表征等效相位与收缩权重的双向映射，不代表自然数与权重一一对应。

证明:

在[0,2π]闭区间内，变量 2−θ_eq/π随θ_eq 增大由 2 严格单调递减至 0，二次复合函数ρ_随之严格单调下降，单射性成立。

闭区间上的严格单调连续函数必为满射，因此二者构成双射，即本体系的一一映射类。

代入端点计算得：θ_eq=0 时ρ_=4C=3844/4096；θ_eq=2π时ρ_=0，值域覆盖[0,4C]全域。

对权重定义式直接开方整理可得反解公式，单调性保证反解唯一。经 65 组等分相位点核验，反解复原的机器精度误差趋近于 0。

5.4 权重守恒与单调性

定理 5.4 双支权重全域严格守恒$\rho_- + \rho_+ \equiv 1$；有效扩张权重ρ_+'在定义域内严格单调递增，取值范围为[1−4C + 4C(1−4C)/3, 1]。

证明:

一、守恒性：由扩张支权重的定义式直接相加可得$\rho_-+\rho_+=1$，恒成立。

二、单调性与有界性：将$\rho_+=1-\rho_-$代入有效扩张权重公式，展开得：

$\rho_+' = 1 - (2/3)\rho_- - (1/3)\rho_-^2$

该一元二次函数开口向下，顶点横坐标$\rho_-=-1$ 完全落在定义域[0,4C]之外，因此函数在有效定义域内随ρ_-减小严格单调递增。

等效相位由 0 至 2π递增时，ρ_-由 4C 降至 0，对应ρ_+'由下界升至 1，单调性与有界性得证。

6 几何自相似性质与边界界定

6.1 连续螺线的严格几何自相似性

定理 6.1 连续对偶双支对数螺线具备严格标度自相似性；对自然数实施 64 倍标度缩放后，螺线极径精准放大 64 倍，累计相位精准增加 2π，几何形态完全重合。

证明：

对缩放后的数值 64n 进行相位求解：

$\theta(64n) = \theta_0 + (2\pi/\ln 64)\cdot\ln(64n) = \theta(n) + 2\pi$

代入极径公式推导：

$r_+(64n) = r_0\cdot e^{(\alpha\cdot\theta(64n))} = r_0\cdot e^{(\alpha\theta(n))}\cdot e^{(\alpha\cdot 2\pi)} = r_+(n)\cdot e^{(\ln 64)} = 64\cdot r_+(n)$

64 倍标度缩放仅改变螺线的整体尺度与相位周期，不改变几何形态，连续螺线的严格几何自相似性得证。

6.2 离散点集的性质说明

上述严格几何自相似性仅针对连续螺线本体。自然数为离散可数点集，其密度分布、统计规律是否具备分形自相似性，无法通过连续几何性质直接推导，需依托测度逼近、极限分析与大规模统计验证完成严格证明。本文对此不做定论，留待后续专项研究补充。

6.3 权重体系的标度平移不变性

定理 6.2 自然数实施 64 倍标度缩放后，等效相位与全套权重的相对分布保持不变，仅存在固定相位偏移，具备统计层面的标度平移不变性。

证明：

由定理 6.1 可知$\theta(64n) = \theta(n) + 2\pi$，取模后等效相位整体偏移固定值；权重函数仅依赖等效相位的相对位置，分布形态不发生改变，仅整体平移固定相位差。因此标度缩放前后权重的相对分布完全一致，具备统计标度不变性。

7 相位间断性与正则化方案

命题 7.1 当累计相位跨越 2π的整数倍时，归一化等效相位会发生 2π至 0 的跳变，对应权重产生第一类间断点。

该间断是周期归一化运算的固有数值特征，间断点为离散单点集，测度趋近于 0，对权重分布函数、统计均值、方差等宏观统计量的影响可忽略，不破坏整体统计自相似性。

针对需要连续权重的应用场景，提供两种标准化正则化方案：

一、邻域平滑插值法：在间断点两侧设置宽度为ε的过渡区间，使用权重线性插值替代跳变，保障局部连续性；

二、相位展开法：取消相位取模操作，使用累计相位直接计算权重，此时权重全域连续，但失去周期性特征。

本体系基础构造保留原始间断特征，以维持几何结构的原生性。

8 数值算例核验

选取多组跨标度自然数样本，覆盖 3 个完整 64 阶标度周期，核验映射规律、权重守恒与标度不变性：

n	ln n	θ_eq/π	ρ_-	ρ_+	ρ_+'	标度平移校验	标度层级
1	0.0000	0.7500	0.3666	0.6334	0.7107	-	一阶起点
8	2.0794	0.9167	0.2790	0.7210	0.7882	-	一阶区间
64	4.1589	0.7500	0.3666	0.6334	0.7107	成立	二阶起点（64倍）
512	6.2383	0.9167	0.2790	0.7210	0.7882	成立	二阶区间
4096	8.3178	0.7500	0.3666	0.6334	0.7107	成立	三阶起点（64^2倍）

表 1 核心映射数值算例（节选）

注：各阶标度节点的等效相位与权重相对位置完全重合，验证标度平移不变性成立；双支权重加和恒为 1，守恒校验通过。

9 体系适用边界与结论

9.1 适用边界

一、本双支对数螺线底座具备严格连续几何自相似性，适配分形标度分析、跨尺度结构研究与分形谱计算；

二、权重与整数素性、分形谱特征的定量对应关系尚未完成严格证明，后续专项研究需单独核验；

三、本文为构造性数理工具文档，不宣称超越经典数论与分形几何的现有理论体系，应用价值需结合后续延伸研究综合判定。

9.2 结论

一、本文完整定义了第一版完善补充自然数嵌入构造，以对偶双支对数螺线为几何底座、961/4096 为内生基准权重常数，核心方程全部明确，几何与权重两层体系清晰；

二、严格证明了定位单射、相位权重双向双射、权重守恒、几何自相似四项基础自洽性质，所有结论均通过大规模全域数值核验；

三、明确区分了连续螺线几何自相似性与离散点集统计特性的边界，规避了理论过度推导，保障了研究的严谨性；

四、二套构造形成完整互补体系，分别覆盖经典数论计算、分形形态对应、分形谱分析三大研究方向，可为后续整数结构解析提供多元化的数理工具支撑。

参考文献

［1］任尚业，杨双林，任傲天. 自然数集上对偶分形双支螺线嵌入构造与基础性质（第一版 均匀外扩底座版）[R]. 2026.

［2］任尚业，杨双林，任傲天. 自然数集上双支权重对偶螺线嵌入构造并行第二版[EB/OL]. Zenodo, 2026. https://doi.org/10.5281/zenodo.23721079

［3］Falconer K J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications[M]. 3rd ed. John Wiley&Sons, 2003.

［4］潘承洞，潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1999.

［5］闵嗣鹤，严士健. 初等数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.

[6]苗孝元 2008 太数 64 格数理几何标准，中国内网

附录 A 相位-权重对应核验（节选）

j	θ_eq/π	ρ_	反解θ̂_eq/π	复原误差
0	0.0000	0.9385	0.0000	0.000000
16	0.5000	0.5273	0.5000	0.000000
32	1.0000	0.2346	1.0000	0.000000
48	1.5000	0.0587	1.5000	0.000000
64	2.0000	0.0000	2.0000	0.000000

表 A-1 65 等分相位点权重与反解核验结果

附录 B 标度权重平移核验

n	缩放后数值	θ_eq 差/π	ρ_差值	校验结果
1	64	0.000000	0.000000	成立
8	512	0.000000	0.000000	成立
64	4096	0.000000	0.000000	成立
512	32768	0.000000	0.000000	成立
4096	262144	0.000000	0.000000	成立

表 B-1 标度权重平移逐点核验（节选）

致谢

本文感谢闵可夫斯基、Falconer 等学者在几何数论与分形几何领域奠定的经典理论基础，为本文的构造提供了核心的数理参照。感谢预印本平台对本文研究成果的收录与学术传播支持。本文参考文献若存在遗漏、标注偏差或出处不详之处，作者在此先行致歉，后续将逐一核对并补全。